MSC 45P05

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е.А. Аршава

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
ул. Сумская, 40, Харьков, 61002, Украина, e-mail: elarshava@mail.ru

Ключевые слова: интегральные операторы, вектор-функции, матричные операторы, ограниченные операторы.

Изучается задача обращения векторных интегральных операторов в пространстве $L^2_m(0,\omega)$ вектор-функций методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1-3].

Введем пространство $L^2_m(0,\omega)$, которое состоит из вектор-функций

$$\vec{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)], \qquad \| \vec{f} \|_m = \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^{\omega} |f_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, m = 2.$$

Пусть задан оператор S, который ограничен в $L^2_m(0,\omega)$,

$$S\vec{f} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\omega} S(x,t)\vec{f}(t)dt, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0 \tag{1}$$

и матричный оператор A_0 вида:

$$A_0\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - e^{\alpha(\xi - t)}\right) f_1(\xi)d\xi \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - e^{\alpha(\xi - t)}\right) f_2(\xi)d\xi \end{pmatrix},$$

$S(x,t)$-матрица, элементы которой принадлежат $L^2_{m\times m}(0,\omega)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] S_{ij}(x,t) = 0.$$

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора вида* (1), *который действует в* $L^2_m(0,\omega)$, *верно представление*

$$(A_0S - SA_0^*)\vec{f} = \int_0^{\omega} \left(M_1(x) + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} M_2(x) + N_1(t) + \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} N_2(t) \right) \vec{f}(t)dt,$$

где

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} s_{11}(x,0) & s_{12}(x,0) \\ s_{21}(x,0) & s_{22}(x,0) \end{pmatrix}, \qquad M_2(x) = \begin{pmatrix} s'_{11}(x,0) & s'_{12}(x,0) \\ s'_{21}(x,0) & s'_{22}(x,0) \end{pmatrix},$$
$$N_1(t) = -\begin{pmatrix} s_{11}(0,t) & s_{12}(0,t) \\ s_{21}(0,t) & s_{22}(0,t) \end{pmatrix}, \qquad N_2(t) = -\begin{pmatrix} s'_{11}(0,t) & s'_{12}(0,t) \\ s'_{21}(0,t) & s'_{22}(0,t) \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Если оператор S имеет ограниченный обратный T, то*

$$(TA_0 - A_0^*T)\vec{f} = \int\limits_0^{\omega} R(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \quad R(x,t) = \sum_{i=1}^{4} P_i(t)Q_i(x), \tag{2}$$

P_i, Q_i - *матрицы* $(2\times 2)(i=\overline{1,4})$, *которые удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{array}{llll} S^*P_1 = E_m, & S^*P_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E_m, & S^*P_3 = N_1^*, & S^*P_4 = N_2^*, \\ SQ_1 = M_1, & SQ_2 = M_2, & SQ_3 = E_m, & SQ_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}E_m. \end{array} \tag{3}$$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 2. *Если оператор S ограничен вместе со своим обратным T и существуют матрицы $P_i, Q_i(i=\overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (3), то для оператора $T = S^{-1}$ верно представление*

$$T\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^{\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \vec{f} \in L_m^2(0,\omega),$$

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega+x-t}\int\limits_{x-t}^{\tau-2\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t \le 0 \\ -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega-x+t}\int\limits_{x-t}^{2\omega-\tau} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t > 0, \end{cases}$$

а матрица - функция $R(x,t)$ определяется формулой (2).

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром па конечном отрезке // Успехи математических наук. – 1980. – 35, Вып. 4 (214). – С.69-129.

2. Аршава Е.А., Янщевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений // Дифференциальные уравнения. – 1996. – 32, №10. – С.1427-1428.

3. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах, Т. 1. Математический анализ / Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С.25-29.

APPLICATION OF OPERATOR EQUALITIES METHOD FOR REVERSION OF VECTOR INTEGRAL OPERATORS

E.A. Arshava

Kharkov National University of Building and Architecture,
Sumskaya Str., 40, Kharkov, 61002, Ukraine, e-mail: elarshava@mail.ru

Key words: integral operators, vector functions, matrix operators, bounded operators.